This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

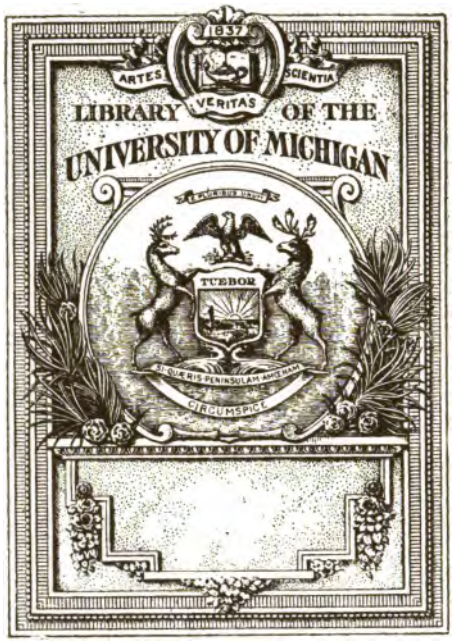
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

6323

Alexander Zöred

NATURPHILOSOPHISCHE UNTERSUCHUNGEN

ZUR

WAHRSCHEINLICHKEITSLEHRE

VON

117

DR. KARL MARBE
PRIVATDOZENT DER PHILOSOPHIE IN WÜRZBURG

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1899.

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten.

QA
273
M31

Druck der Kgl. Universitätsdruckerei von H. Stürtz in Würzburg.

From the Estate of
Prof. Ernst
3-26-30

Vorwort.

Diese Arbeit will weder einen Beitrag zur mathematischen Behandlung der Wahrscheinlichkeit liefern, noch beschäftigt sie sich mit der logischen Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie will lediglich auf gewisse Thatsachen in der Aussenwelt hinweisen, welche bisher unbekannt oder doch nicht anerkannt waren. Die weitere Untersuchung dieser und verwandter Thatsachen wird freilich vielleicht einmal eine Modifikation der üblichen Wahrscheinlichkeitsansätze mit sich bringen. — Der Gegenstand der Schrift verlangte eine kurze Behandlung der Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ich habe dabei versucht, die Darstellung so klar zu gestalten, dass ihr auch solche Leser, welchen jene Disziplin unbekannt ist, mit Leichtigkeit folgen können. Dabei habe ich im Interesse der Übersichtlichkeit und, wie ich hoffe, nicht zum Schaden der streng logischen Entwickelung die Ansätze der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit nicht, wie üblich, aus einfachen Wahrscheinlichkeiten, sondern direkt abgeleitet (§§ 2, 3), so dass sich unsere einfachen Wahrscheinlichkeiten als spezielle Fälle der zusammengesetzten darstellen.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Kapitel. Aufstellung des Problems 1
§ 1. Hülfssätze aus der Kombinationslehre 1
§ 2. Die normale Dispersion. Das Prinzip der Willkürlichkeit der Gruppeneinteilungen 3
§ 3. Gegenstand und Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung 5
§ 4. Die normale Dispersion und die Induktion 7
§ 5. D'Alembert's Stellung zu unserem Problem 9
II. Kapitel. Untersuchungen über die Dispersion . . . 11
§ 6. Versuche 11
§ 7. Über die öffentlichen Glücksspiele 15
§ 8. Untersuchung der Resultate des Roulettespiels . . . 18
§ 9. Allgemeine Bedeutung der gewonnenen Resultate . . 26
§ 10. Ergänzung der Untersuchungen des § 8 28
III. Kapitel. Naturphilosophische Theorie der Dispersion 30
§ 11. Notwendigkeit einer naturphilosophischen Theorie. Naturphilosophische Theorie der Glücksspiele 30
§ 12. Naturphilosophische Theorie der Beobachtungsfehler und der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft 37
§ 13. Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der theoretischen Physik 39
IV. Kapitel. Folgerungen. Das Petersburger Problem . 42
§ 14. Über die Wahrscheinlichkeit einzelner Ereignisse . . 42
§ 15. Das Petersburger Problem 43

I. Kapitel.

Aufstellung des Problems.

§ 1. Hülfssätze aus der Kombinationslehre.

Wenn man ein Fünfzigpfennigstück in einem Würfelbecher intensiv schüttelt und dasselbe dann auf eine horizontale, ebene Fläche fallen lässt, so wird die oben liegende Seite entweder Zahl oder Wappen zeigen. Führt man dieselbe Thätigkeit zweimal aus, so sind vier Ergebnisse denkbar, indem sich jedes bei einmaligem Werfen denkbare Resultat entweder mit dem Ergebnis Wappen oder dem Ergebnis Zahl verbinden kann. Man erhält also bei zweimaligem Werfen entweder beidemal Wappen, beidemal Zahl oder zuerst Wappen und dann Zahl oder endlich zuerst Zahl und dann Wappen.

Bezeichnet man also Wappen mit w und Zahl mit z, so sind folgende Ergebnisse (Gruppen, Ergebnisgruppen) denkbar.

Bei einmaligem Werfen: w
z.

Bei zweimaligem Werfen: w w
w z
z w
z z.

Wirft man dreimal hintereinander, so kann sich jede der bei zweimaligem Werfen denkbaren Gruppen mit jedem der bei einmaligem Werfen denkbaren Ergebnisse verbinden.

Bei dreimaligem Werfen sind daher die denkbaren Ergebnisse folgende:

W W W
W W Z
W Z W
W Z Z
Z W W
Z W Z
Z Z W
Z Z Z.

Bei einmaligem Werfen sind, wie man sieht, 2 (d. i. 2^1), bei zweimaligem Werfen 4 (2^2), bei dreimaligem Werfen 8 (2^3) Ergebnisse denkbar. Bei n-maligem Werfen sind 2^n Gruppen denkbar.

Unter den 2^n Gruppen, die für n-maliges Werfen denkbar sind, befindet sich, wie man an der Hand der obigen Beispiele sehen kann, stets eine Gruppe, die aus lauter Wappen, und eine solche, die aus lauter Zahlen besteht. Derlei Gruppen (solche also, die aus lauter gleichen Elementen bestehen) wollen wir als „reine" Gruppen bezeichnen. Wir dürfen dann sagen: unter den 2^n Gruppen, deren Eintreten bei n-maligem Werfen denkbar ist, befinden sich zwei reine Gruppen.

* * *

Roulette

Hat man in einem Gefäss 37 Kugeln und zieht man, ohne in das Gefäss zu blicken, eine Kugel heraus, so sind 37 Fälle denkbar. Sind von diesen Kugeln 18 schwarz, 18 rot und eine grün, so ergeben 18 der möglichen Ziehungen das Resultat schwarz, 18 das Resultat rot und eine das Resultat grün. Zieht man 2 mal nach einander, so sind 37^2 Gruppen denkbar, indem sich jedes der bei einmaligem Ziehen denkbaren Resultate mit sich selbst und jedem andern verbinden kann. Zieht man dreimal nach einander, so sind 37^3 Ergebnisse denkbar, da sich jede der bei zweimaligem Ziehen

denkbaren Gruppen mit jedem der bei einmaligem Ziehen denkbaren Ergebnisse kombinieren kann. Zieht man n-mal nach einander, so sind 37^n Gruppen denkbar.

Alle 37 denkbaren Resultate, die dem einmaligen Ziehen entsprechen, enthalten nur rot, schwarz oder grün. Alle diese Ergebnisse sind also rein. Bei zweimaligem Ziehen aber ist nur ein Teil der Ergebnisse rein.

Jede der bei einmaligem Ziehen denkbaren Rot-Ziehungen kann sich bei zweimaligem Ziehen wiederum mit 18 andern Rotergebnissen verbinden. Es sind also für zweimaliges Ziehen 18^2 reine, aus Rot-Ziehungen resultierende Gruppen denkbar. Dieselbe Betrachtung lässt sich für Schwarz anstellen. Wenn man daher zweimal nacheinander zieht, so sind $2 \cdot 18^2$ Gruppen denkbar, die entweder aus lauter roten oder aus lauter schwarzen Elementen bestehen. Zieht man n-mal nacheinander, so befinden sich unter den 37^n denkbaren Gruppen $2 \cdot 18^n$ reine Rot- und Schwarzgruppen.

§ 2. Die normale Dispersion. Das Prinzip der Willkürlichkeit der Gruppeneinteilungen.

Wenn man nun in der angegebenen Weise sehr oft mit einem Geldstück wirft und wenn man die erhaltenen Resultate in gleich grosse Gruppen einteilt, so dass jede Gruppe mit demjenigen Resultat anfängt, welches auf das letzte zur vorigen Gruppe gehörige Resultat folgt, — so ist der allgemeinen Annahme zufolge die wahrscheinlichste Anordnung die, dass alle denkbaren Gestaltungen einer Gruppe gleich oft hervortreten. Wirft man daher z. B. $100 \cdot 2^{100}$ mal mit einem Fünfzigpfennigstück und teilt man die erhaltenen Resultate nach der soeben angegebenen Methode in Gruppen à 100 ein, so wird man wahrscheinlicher Weise auch eine reine Gruppe à 100 Wappen und eine reine Gruppe à 100 Zahlen erhalten. — Zieht man dem entsprechend $100 \cdot 37^{100}$ mal aus

einem Gefäss, in welchem sich 18 rote, 18 schwarze und eine grüne Kugel befinden und teilt man in der beschriebenen Weise die Resultate ein in Gruppen à 100, so erhält man der allgemeinen Ansicht zufolge am wahrscheinlichsten $2 . 18^{100}$ reine Rot- und Schwarzgruppen à 100.

Das gleichmässige Hervortreten aller denkbaren Gruppen à n heisst (nach Lexis) die normale Dispersion der Gruppen à n. Der Begriff der normalen Dispersion hat aber natürlich nicht nur Sinn für die als Beispiele angenommenen Fälle, in welchen gerade $n.2^n$ mal geworfen wurde, sondern auch für die Fälle, wo öfter oder weniger oft geworfen wird. Wenn man sagt, die normale Dispersion sei die wahrscheinlichste Verteilung, so heisst dies allgemein soviel: es ist am wahrscheinlichsten, dass keine der denkbaren Ergebnisgruppen bevorzugt wird.

Bis jetzt wurde für die Betrachtung der Lehre von der Dispersion angenommen, dass die Gruppeneinteilung so erfolgt, dass jede Gruppe mit demjenigen Resultat anfängt, welches auf das letzte zur vorigen Gruppe gehörige Resultat folgt. Es ist aber nicht abzusehen, warum die Art der Gruppeneinteilung irgend einen konstant wirkenden Einfluss auf die Eigentümlichkeit der Dispersion ausüben sollte. Man nehme an, man habe sehr oft in der angegebenen Weise mit einem Fünfzigpfennigstück geworfen und folgende Resultate erhalten: w z z z w z w w w w w z w z z z w z z w z w z w w u. s. f. Nun ist schlechterdings nicht zu begreifen, warum die Dispersion der Gruppen à 2 prinzipiell anders ausfallen soll, wenn man für die Betrachtung nur die Würfe 1 u. 2, 5 u. 6, 9 u. 10 u. s. w. in Betracht zieht, als wenn man ebenso viel Gruppen verwendet, dabei aber so verfährt, dass man jede Gruppe mit demjenigen Resultat beginnen lässt, welches auf das letzte Resultat der vorigen Gruppe folgt. Ebensowenig ist abzusehen, warum die Gruppierung der Resultate nach dem

Prinzip 1 u. 2, 2 u. 3, 3 u. 4 u. s. f. eine prinzipiell verschiedene Dispersion ergeben soll gegenüber dem Prinzip 1 u. 2, 3 u. 4, 5 u. 6 u. s. f. Ist daher die Lehre von der Dispersion überhaupt richtig, so wird man auch diejenigen Gruppeneinteilungen als zulässig ansehen müssen, in welchen sich (wie bei der eben besprochenen) die Gruppen kreuzen. Freilich sind in diesem Fall die einzelnen Gruppen von einander abhängig. Aber diese Thatsache ist von keinerlei Einfluss auf die spezifische Eigentümlichkeit der zu erwartenden Dispersion, weil nicht abzusehen ist, warum die fragliche Abhängigkeit der Gruppen die Dispersion allgemein in einem bestimmten Sinn beeinflussen sollte. Wir können den hier entwickelten Grundsatz, demzufolge die Art der Gruppeneinteilung ohne Einfluss auf die zu erwartende Dispersion ist, als das Prinzip der Willkürlichkeit der Gruppeneinteilungen bezeichnen.

§ 3. Gegenstand und Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Etwas anderes ist die Frage nach der wahrscheinlichsten Verteilung der einzelnen denkbaren Gruppen à n, etwas anderes die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Fall eine oder mehrere Gruppen eintreten. Man misst die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Fall eine oder mehrere Gruppen à n eintreten durch Brüche, in deren Nenner die Zahl aller denkbaren Gruppen à n steht und in deren Zähler die Anzahl derjenigen Gruppen steht, deren Wahrscheinlichkeit man messen will. Demnach ist in unserm Beispiel mit dem Werfen des Fünfzigpfennigstückes die Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Fall Wappen zu werfen $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit n-mal nacheinander Zahl

oder Wappen zu werfen ist $\frac{2}{2^n}$. In unserm Beispiel mit den Kugeln beträgt die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen $\frac{18}{37}$. Die Wahrscheinlichkeit, zehn rote Kugeln nacheinander zu ziehen, beträgt $\frac{18^{10}}{37^{10}}$, die Wahrscheinlichkeit entweder 10 rote oder 10 schwarze Kugeln nacheinander zu ziehen, beträgt $\frac{2 \cdot 18^{10}}{37^{10}}$.

Diese Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit welcher in einem bestimmten Fall eine Gruppe[1]) von Ereignissen eintritt, sowie die Eruierung der in § 2 behandelten wahrscheinlichsten Anordnung der denkbaren Gruppen und die hiermit zusammenhängenden mathematischen Überlegungen machen das aus, was man Wahrscheinlichkeitsrechnung[2]) nennt. Die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit dem tiefern Sinn der hierher gehörigen mathematischen Ansätze. Auch derjenige, welcher den Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ferner steht, wird aus dem bisherigen entnommen haben, dass der Sinn, den man den mathematischen Ansätzen beilegt, lediglich von der Definition des gleich wahrscheinlichen abhängt. Die Ansicht nun, zu der man hinsichtlich dieses Begriffes mit Recht allgemein gelangt ist, ist die, dass wir diejenigen Ergebnisgruppen als gleich wahrscheinlich zu betrachten haben, welche zwar denkbar sind,

[1]) Hier muss man sich erinnern, dass ich p. 1 auch Gruppen à 1 statuiert habe.

[2]) Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehen auf Pascal (1623—1662) und Fermat (1601—1665) zurück. An neueren Lehrbüchern über den Gegenstand mögen an dieser Stelle genannt werden: Meyer, „Wahrscheinlichkeitsrechnung", deutsch bearbeitet von Czuber (1879), Borchardt, „Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre" (1889) und Haussner's deutsche Ausgabe mit Anmerkungen von J. Bernoullis „Ars coniectandi" in Ostwald's Klassiker d. ex. Wiss., welche demnächst erscheinen soll.

über deren Eintreten wir uns jedoch in gleicher Unwissenheit befinden. In unsern Beispielen mit dem Fünfzigpfennigstück und den Kugeln sind wir, wie man wenigstens allgemein annimmt, für alle denkbaren Gruppen à n in gleicher Unwissenheit darüber, ob sie eintreten oder nicht. Man bezeichnet diese Auffassung der gleich wahrscheinlichen Fälle auch als das Prinzip des mangelnden Grundes, weil wir uns über das Eintreten der denkbaren Gruppen deshalb in gleicher Unwissenheit befinden, weil wir keinen Grund haben, das Eintreten der einen Gruppe mehr zu erwarten als das der andern[1]).

§ 4. Die normale Dispersion und die Induktion.

Wir sahen, dass diejenigen denkbaren Gruppen à n als gleich wahrscheinlich gelten, über deren Eintreten wir uns in gleicher Unwissenheit befinden. Ich bestreite nun, dass in irgend einem Beispiel alle denkbaren Gruppen à n für alle Werte von n vorkommen. Ich behaupte nämlich, dass in allen Fällen, wo man die Wahrscheinlichkeitsrechnung anzu-

---

1) Die hier vorgetragene, auf Laplace zurückgehende, fast allgemein vertretene Auffassung der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist neuerdings von Stumpf (Sitzgsber. d. Münchener Akad. Philos.-Philol. u. hist. Kl. Jahrgang 1892 [erschienen 1893] p. 37 ff.) exakt formuliert und gegen Einwände glücklich verteidigt worden. Übrigens differiert v. Kries (Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1886) wenigstens de facto weniger von der herrschenden Ansicht, als man gewöhnlich anzunehmen scheint. Denn er basiert die Entscheidung darüber, was „gleichwertige Spielräume" sind (und hierauf kommt alles an) auf das Prinzip des mangelnden Grundes. Auch Goldschmidt („Die Wahrscheinlichkeitsrechnung" 1897) differiert nicht wesentlich von der Lehre des Laplace. Er verwirft die v. Kries'sche Spielraumtheorie, polemisiert eifrigst gegen Stumpf, bezeichnet aber dann selbst das gleich wahrscheinliche als das gleich begründete. Was aber gleich begründet, ist offenbar auch gleich mangelhaft begründet oder gleich unbegründet. — Verfasser hat einige Bemerkungen über Goldschmidt's Buch mitgeteilt in der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Dieselben sind beim Abschluss dieser Schrift noch nicht erschienen.

wenden pflegt, für gewisse Gruppengrössen die reinen Gruppen niemals vorkommen. Ist diese Behauptung allgemein zutreffend, so wird man in keinem einzigen Beispiel alle denkbaren Gruppen für alle Werte von n als gleich wahrscheinlich ansehen dürfen. In diesem Paragraph sollen nun die Überlegungen mitgeteilt werden, die mich zu dieser Behauptung veranlasst haben. Ich gehe aus von unserm Beispiel mit dem Geldstück.

Das Resultat eines jeden einzelnen Wurfes ist abhängig von einer ganzen Reihe von Bedingungen, von der ganzen geistigen und körperlichen Disposition des werfenden Menschen, von der Beschaffenheit und Grösse des Würfelbechers, von der Fläche, auf welche das Fünfzigpfennigstück geworfen wird, von den Bewegungen des Armes und der Hand beim Schütteln des Bechers, von dem Winkel, unter welchem das Geldstück auffällt u. dergl. mehr. Ein Teil dieser Bedingungen ist konstant, so z. B. die Beschaffenheit des Würfelbechers; der andere Teil ist variabel; hierher gehören z. B. die Bewegungen des Armes beim Schütteln. Die variabeln Bedingungen sind in vielfacher Weise variabel: so sind unendlich viele Abstufungen der Intensität des Schüttelns, unendlich viele Variationen der Bewegungen des Armes möglich. Jede mögliche Gestaltung der Gesamtheit der variabeln Bedingungen erzielt in Verbindung mit den konstanten Bedingungen ein ganz bestimmtes Resultat, so zwar, dass die eine Hälfte aller möglichen Gestaltungen der variabeln Bedingungen das Resultat Wappen, die andere Hälfte das Resultat Zahl ergiebt. Hat man nun irgend eine Gesetzmässigkeit des Verlaufes der Resultate während tausend Fällen beobachtet, so darf man hieraus auf einen gesetzmässigen Verlauf der variabeln Bedingungen schliessen. Wofern nun die konstanten Bedingungen wirklich dieselben bleiben, so wird auch dieser gesetzmässige Verlauf der variabeln Bedingungen und somit

der beobachtete Verlauf der Resultate während der folgenden tausend Fälle von neuem in ungefähr gleicher Weise eintreten müssen. Eine ungefähre Identität der konstanten Bedingungen für den Fall, dass eine Person in der angegebenen Weise wirft, erscheint aber als eine durchaus plausible Annahme. Man sieht, dass durch diese Überlegungen die induktionsmässige Betrachtung der Wirklichkeit auf einen Fall angewandt wird, wo man dieselbe bisher ausgeschlossen hat.

Analoge Betrachtungen kann man nun auf alle Fälle anwenden, in denen man der herkömmlichen Ansicht zufolge alle denkbaren Gruppen als gleich wahrscheinlich betrachtet. Sollten diese Überlegungen richtig sein, so würde die herkömmliche Lehre von der normalen Dispersion praktisch bedeutungslos sein und es würden andere Auffassungen an ihre Stelle treten müssen. Eine grosse Zahl der Wahrscheinlichkeitsansätze bedürfte einer Modifikation.

§ 5. D'Alemberts Stellung zu unserem Problem.

Indem ich seit geraumer Zeit derartigen Überlegungen nachging, wie sie an der Hand des Beispiels mit dem Fünfzigpfennigstück skizziert wurden, habe ich mich zugleich in die Litteratur der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuarbeiten versucht. Bei dieser Gelegenheit sind mir natürlich auch d'Alembert's Schriften über diesen Gegenstand bekannt geworden. Auch d'Alembert bestreitet, dass jemals alle denkbaren Gruppen gleich wahrscheinlich seien; er behauptet vielmehr, dass (um bei unserm Beispiel zu bleiben), die Wahrscheinlichkeit, dass 100mal aufeinander Wappen folgt, nicht $\frac{1}{2^{100}}$, sondern 0 sei und er bestreitet, dass bei beliebig häufigem Ziehen von Kugeln, der Fall, dass man tausendmal rot zieht, jemals eintritt. Auch für d'Alembert ist daher das, was man normale Dispersion nennt, wenn es sich um grössere Gruppeneinteilungen handelt, nicht das wahrscheinlichste, son-

dern ein absolut ausgeschlossenes Ergebnis. Auch nach d'Alembert kann also in den Fällen, wo man die üblichen Wahrscheinlichkeitsberechnungen anwendet, dasselbe Ereignis nie mehr als p-mal nacheinander folgen[1]).

D'Alembert macht freilich keinen Versuch, den Wert von p zu bestimmen; er zweifelt sogar daran, dass eine solche Bestimmung jemals möglich sei und als Beweis dafür, dass es überhaupt einen Maximalwert von p gebe, führt er einfach den Satz an, dass es sich eben thatsächlich so verhalte. Aber d'Alembert betont ausdrücklich, dass die Überlegungen der Mathematiker, denen zufolge alle gleichgrossen Gruppen gleich wahrscheinlich seien, vom rein mathematischen Standpunkt aus nicht zu verwerfen seien. Er bestreitet nur, dass die Naturvorgänge ihnen entsprechend ablaufen.

Diese Ausführungen d'Alembert's haben wenig Beifall gefunden. Schon M. Daniel Bernoulli soll sie in mündlicher Rede als lächerlich bezeichnet haben[2]) und keine der mir bekannten Schriften legt ihnen einen besonderen Wert bei. Sie haben auch in der That in gewisser Beziehung etwas unbefriedigendes: d'Alembert hätte versuchen müssen, den Grund zu finden, aus welchem nicht alle denkbaren Gruppen jeder Klasse vorkommen. Aber trotzdem sind diese Einwände unseres Gelehrten von weittragender Bedeutung.

D'Alembert's positive Behauptungen über den Verlauf des Geschehens stimmen, wie man sieht, mit den in § 4 ausgesprochenen durchaus überein, wenngleich der Ausgangspunkt d'Alembert's ausschliesslich in der direkten Beobachtung, der meinige mehr in logischen Überlegungen liegt. Ich werde nun im folgenden Kapitel die d'Alembert'sche Behauptung wahrscheinlich zu machen suchen.

---

[1]) Vergl. D'Alembert, Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie. Amsterdam 1767. p. 275 ff.

[2]) D'Alembert a. a. O. p. 298.

II. Kapitel.

Untersuchungen über die Dispersion.

§ 6. Versuche.

Um d'Alemberts Ansicht zu prüfen, habe ich zunächst Versuche angestellt in der Erwartung, dass gewisse grössere Gruppen, deren Auftreten den herrschenden Anschauungen nach durchaus wahrscheinlich ist, thatsächlich nicht vorkommen. Ich habe zunächst 400 mal mit einem Fünfzigpfennigstück in der angegebenen Weise geworfen, während ein Assistent[1]) die Resultate sogleich niederschrieb. Die Ergebnisse wurden fortlaufend numeriert, so dass wir zu folgender Tabelle gelangten:

Tabelle I.

Wappen	Zahl	Wappen	Zahl	Wappen	Zahl
	1		14		27
	2	15			28
	3		16		29
4			17		30
5			18		31
	6	19			32
	7		20	33	
	8	21			34
9		22		35	
10		23			36
11			24	37	
12			25	38	
13		26		39	

[1]) Als Assistent wirkte Herr Korrektor Fr. Sauer in Würzburg. Derselbe hat auch zum grössten Teil die Rechnungen ausgeführt, welche den folgenden Tabellen zugrunde liegen. Ein kleinerer Teil derselben wurde von mir selbst ausgeführt. Alle Rechnungen wurden mehrfach nachgeprüft.

Wappen	Zahl	Wappen	Zahl	Wappen	Zahl
40		47		54	
41			48		55
	42	49		56	
	43	50		57	
	44	51			58
45			52		59
46		53			60 u. s. w.

Dann wurde das ganze Material dieser Tabelle in Gruppen à 10 abgeteilt, so zwar dass zuerst die Würfe 1—10, dann die Würfe 2—11, dann die Würfe 3—12 u. s. f. in einer Gruppe vereinigt wurden. Das Material ergab daher 391 Gruppen à 10. Dann wurde das ganze Material in Gruppen à 9 eingeteilt, was 392 Gruppen à 9 ergab. Dann wurde alles in Gruppen à 8 eingeteilt u. s. w. u. s. w. Schliesslich wurde alles in 399 Gruppen à 2 und dann in 400 Gruppen à 1 eingeteilt.

Nun wurde abgezählt, wie viele der abgeteilten Gruppen à 1, 2 ..... 10 aus lauter Wappen bezw. Zahlen bestanden. Das Resultat dieser Auszählung enthält folgende

Tabelle II.

Gruppen à	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen
1	400
2	212
3	117
4	69
5	33
6	11
7	2
8	0
9	0
10	0

Andererseits wurde berechnet, wie viele reine Gruppen für die einzelnen Gruppeneinteilungen nach der herkömm-

lichen Lehre von der normalen Dispersion zu erwarten sind. Wir wissen aus § 1, dass, wenn man z. B. 3 mal wirft, dass dann 2^3 d. i. 8 Ergebnisgruppen denkbar sind; unter diesen befinden sich 2 reine Gruppen. Wie viele reine Gruppen sich unter 398 Gruppen à 3 befinden, ergiebt sich demnach aus der Gleichung $398 : x = 8 : 2$. Ebenso wie für die Gruppen à 3 kann man für die übrigen die wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen berechnen.

Tabelle III enthält ausser der „wirklichen Anzahl" diese „wahrscheinliche Anzahl" der reinen Gruppen à 1—10. Die letzte Kolumne dieser Tabelle enthält denjenigen Bruch, welcher entsteht, wenn man die wahrscheinliche Anzahl durch die wirkliche Anzahl dividiert.

Tabelle III[1]).

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
1	400	400	400	1,00
2	399	200	212	0,95
3	398	100	117	0,89
4	397	50	69	0,73
5	396	25	33	0,76
6	395	12	11	1,09
7	394	6	2	3,00
8	393	3	0	∞
9	392	2	0	∞
10	391	1	0	∞

[1]) Die Zahlen der dritten und letzten (fünften) Kolumne dieser Tabelle sind zum Teil abgerundete Werte. Bei der Abrundung wurden 0,5 und die grösseren Werte als voll gerechnet, die kleineren wurden vernachlässigt. Ebenso wie bei Tabelle III wurde bei der Berechnung aller später zu publizierenden, analogen Tabellen verfahren.

Die Experimente, deren Ergebnisse in dieser Tabelle niedergelegt worden sind, wurden angestellt um zu prüfen, ob gewisse grössere, den herkömmlichen Anschauungen zufolge durchaus zu erwartende Gruppen nicht vorkommen. Dies ist für unsere Versuche der Fall. Man sieht aus Tabelle III, dass die Gruppen à 8, 9 und 10 nicht auftreten, obgleich es, wenn alle denkbaren Gruppen gleich wahrscheinlich sind, auch durchaus wahrscheinlich ist, dass unter circa 392 Gruppen à 8 oder 9 oder 10 reine Gruppen à 8, 9 bezw. 10 vorkommen. Unsere Tabelle scheint aber auch zu lehren, dass innerhalb gewisser Grenzen mit zunehmender Gruppengrösse das Verhältnis der wahrscheinlichen Anzahl zur wirklichen Anzahl der reinen Gruppen stets grösser wird: der in der letzten Kolumne unserer Tabelle mitgeteilte Quotient steigt nämlich bei den drei grössten Gruppengrössen, für welche noch reine Gruppen vorkommen, von 0,76 auf 3,00.

Nun wurden aber auch andere ähnliche Versuche angestellt. Zunächst wurde in derselben Weise wie mit dem Fünfzigpfennigstück 400 mal mit einem Markstück gearbeitet. Dann wurde aus einem Gefäss, in dem eine rote und eine schwarze Kugel waren, 400 mal gezogen. Nach jeder Ziehung wurde die Kugel wieder in das Gefäss zurückgelegt und dieses kräftig geschüttelt. Diese Versuche ergaben auch Gruppen à 11 und grössere. Da aber bei derlei Experimenten erst unter 2^{11} (d. i. 2028) Gruppen 2 reine Gruppen à 11 zu erwarten sind, so zeigten diese Ergebnisse, dass die benutzte Versuchszahl (400) für unsere Untersuchung zu klein war: die d'Alembertsche Behauptung trifft offenbar für Gruppen à 11 und für kleinere nicht durchweg zu, wenigstens nicht bei Versuchen, die nach Art der bisher mitgeteilten angestellt sind. Ich beschloss daher die Versuchszahl ganz erheblich zu vergrössern.

§ 7. Über die öffentlichen Glücksspiele.

Während ich nun über passende Mittel und Wege diesen Plan ohne zu grossen Zeitaufwand auszuführen nachdachte, kam ich auf den Gedanken die Publikationen zu benützen, welche über die Glücksspiele öffentlicher Spielbanken gemacht werden.

Dieser Weg schien nicht nur bequemer als das eigene Experimentieren. Er gestattete auch das zu benützende Material in nahezu beliebig hohem Grade auszudehnen. Vor allem aber glaubte ich, dass etwaige zwingende Schlüsse aus den Ergebnissen öffentlicher Glücksspiele auf einen grösseren Beifall rechnen könnten als Schlüsse aus Versuchen, die von mir selbst angestellt wurden. Der Einwand, dass die Resultate unwillkürlich im Sinne der von mir vertretenen Anschauungen beeinflusst seien, schien jedenfalls entkräftet, wenn Spiele benützt wurden, die von andern und in einem von dem meinigen ganz abweichenden Interesse ausgeführt wurden. Durch die Wahl von Spielergebnissen aus ganz verschiedenen Orten und Zeiten aber schien diesem Einwand jeder Boden entzogen.

Die Spiele nun, welche in den Kursälen der Luftkurorte und Bäder gewöhnlich gespielt werden, sind das Roulettespiel, das Trente et quarante und das Pferdchenspiel (les petits chevaux). Aber nur die Ergebnisse des Roulettespiels und des Trente et quarante pflegen publiziert zu werden.

Das Trente et quarante ist ein Kartenspiel. Es war mir daher von vorne herein klar, dass die Ergebnisse dieses Spieles für unsern Zweck nicht empfehlenswert seien. Denn ich habe durch eine Reihe von vor Jahren angestellten Versuchen sowie durch eigene Erfahrungen beim Kartenspielen die Ansicht gewonnen, dass bei dem Mischen, wie es gewöhnlich ausgeführt wird, die Karten nur sehr wenig durchein-

ander gebracht werden. Freilich kann man durch richtiges und intensives Mischen die Karten auch gehörig untereinander mengen. Aber wer garantiert uns dafür, dass bei dem Trente et quarante, dessen Ergebnisse wir benützen, dieses immer in richtiger Weise geschehen ist? Benützen wir daher die Ergebnisse des Trente et quarante, so können wir möglicherweise zu Resultaten gelangen, deren spezifische Eigentümlichkeit aus mangelhaftem Mischen resultiert.

Nun ist aber klar, dass meine Überlegungen des § 4 und die d'Alembertsche Behauptung, wenn sie wirklich richtig sein sollten, von ganz allgemeiner Tragweite sind: sie beziehen sich ja auf alle Fälle, wo mehrere Ergebnisgruppen denkbar sind, wo man aber glaubte, vollständig darüber im Ungewissen zu sein, welche eintritt. Wir dürfen daher, um die fragliche allgemeine Gesetzmässigkeit zu prüfen, nicht Spielergebnisse anwenden, deren spezifische Eigentümlichkeit möglicherweise auf Verhältnissen beruht, die bei anderen Vorgängen, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt wird, gar nicht realisiert sind[1]).

So habe ich mich denn darauf beschränkt, die Ergebnisse des Roulettespiels zu benützen. Der Apparat, welcher zu diesem Spiel gebraucht wird, besteht aus einer horizontal gerichteten, um ihren Mittelpunkt sehr leicht drehbaren Scheibe, deren peripherer Teil in 37 gleich grosse Fächer eingeteilt ist, welche die Nummern 0—36 inklusive tragen. Während nun die Scheibe in Rotation gesetzt wird, wird in einer um die Scheibe laufenden Rinne eine Kugel in ent-

1) Aus analogen Gründen wäre wohl auch die Benützung von Versuchen mit 37 in einem Gefäss befindlichen Kugeln im Sinne des oben fingierten Beispieles für unsern Zweck nicht besonders empfehlenswert. Ähnliche Versuche hat neuerdings ausgeführt: Westergaard Die Grundzüge der Theorie der Statistik 1890. p. 2. Über Versuche anderer vergl. ebenda und Jevons, The principles of science. London 1887. p. 206 ff.

gegengesetzter Richtung bewegt. Diese Rinne und der Rand der Rouletteschеibe sind so gearbeitet, dass, wenn sich die Kugel und die Scheibe nicht oder nur langsam drehen, die Kugel in ein Fach des Scheibenrandes fallen muss. Wenn also die Bewegungen der Scheibe und der Kugel langsamer werden, so fällt die Kugel in ein Fach und zeigt dadurch die Nummer dieses Faches an. Alle Fächer ausser dem mit 0 bezeichneten sind entweder rot oder schwarz. Diese Farben sind so angeordnet, dass auf schwarz rot, dann wieder schwarz, dann rot folgt u. s. f. 0 gilt nicht als Farbe. Das Spiel besteht nun darin, dass die Mitspieler auf die einzelnen Nummern und Farben setzen.

Es liegt ausserhalb der Absicht dieser Schrift, das Verfahren beim Spielen näher zu beschreiben. Das, was bisher mitgeteilt wurde, genügt uns vollständig.

Die Publikationen der Spielergebnisse enthalten nun die Nummern in der Reihenfolge, in welcher sie herausgekommen sind. Ob eine Nummer rot oder schwarz war, ergiebt sich gleichfalls direkt aus den Publikationen. In der folgenden Tabelle IV teile ich die 60 ersten Nummern mit, welche am 16. August 1887 an der Roulette Nr. 2 in Monte-Carlo herausgekommen sind.

Tabelle IV.

Schwarz	Rot	Schwarz	Rot	Schwarz	Rot
26			32	6	
	36		1		25
	30		9	35	
15		20			19
	5	24		31	
22		26			21
	36	22		20	
31			34		21
17			7	10	
	32	31			25

Schwarz	Rot	Schwarz	Rot	Schwarz	Rot
	19	13		24	
	1	22			36
4		11			23
	32		0		32
17			12	8	
	5	4		31	
26		29			12
	9	10			7
	23	28		20	
24		11			5

Diese Tabelle ist entnommen aus den Spielresultaten (permanences, Permanenzen) der Roulette Nr. 2 in Monte-Carlo, welche bis zum 1. Oktober 1888 bei Hern Buchhänder Henri in Monte-Carlo veröffentlicht wurden und noch jetzt käuflich sind[1]). Seit 1887 erscheint in Paris eine Zeitung, „Le Monaco", welche gleichfalls die Spielresultate von Monte-Carlo mitteilt. Ein Exemplar dieser Zeitung enthält Spielergebnisse, die während einer Woche herausgekommen sind. Diese Mitteilungen beziehen sich aber nicht auf die Roulette Nr. 2. Die Korrespondenten des „Monaco" haben vielmehr, wie mir wenigstens von der Redaktion mitgeteilt wurde, die Aufgabe, täglich an derjenigen Roulette die Resultate aufzuschreiben (zu „pointieren"), wo das Spiel zuerst eröffnet wird[2]).

§ 8. Untersuchung der Resultate des Roulettespiels.

Das bei Henri erschienene Buch, aus welchem die obige Tabelle IV entnommen wurde, enthält die Spielresultate der

[1]) Die „Permanenzen" der Roulette Nr. 2 für einen halben Monat erschienen in Buchform und kosten sowohl im Fürstentum Monaco als im Ausland 10 fr. Gegenwärtige Adresse des Herrn Henri: Place Michel de l'Hospital Nr. 7, Clermont-Ferrand, Frankreich.

[2]) Der „Monaco" erscheint wöchentlich einmal bei Madame Polyxène Philip, Rue de quatre septembre Nr. 20. Der Preis eines Exemplares beträgt für Frankreich und Ausland 1 Fr.

Roulette Nr. 2 zu Monte-Carlo vom 16. bis zum 31. August 1887, das sind im Ganzen 11483 Resultate. An jedem Tage dieses halben Monates wurde demnach ungefähr $\frac{11483}{16} =$ 718 mal gespielt. Das Material jedes Tages wurde nun (ganz analog dem durch das Werfen mit dem Fünfzigpfennigstück gewonnenen Material) in Gruppen à 1, 2, ... 13, 14 eingeteilt. Dann wurde die wirkliche Anzahl aller reinen Rot- und Schwarz-Gruppen à 1, 2, ... 13, 14 festgestellt[1]). Dann wurde aus der Anzahl aller Gruppen die wahrscheinliche Anzahl der reinen Rot- und Schwarzgruppen bestimmt. Wie hierbei verfahren wurde, ergiebt sich direkt aus der in § 6 mitgeteilten Gleichung, bei welcher für 398 und 8 die entsprechenden Werte einzusetzen sind und aus dem oben behandelten Beispiel mit den 37 in einem Gefäss befindlichen Kugeln, wobei die grüne Kugel in dem Gefäss der Null der Roulette entspricht.

Die Ergebnisse dieser Auszählungen und Berechnungen enthält folgende Tabelle V, welche, wie man sieht, ebenso zusammengefügt ist, wie Tabelle III. Dass die aufeinander folgenden Werte der zweiten Kolumne jeweils um 16 von einander differieren, rührt daher, dass niemals Ergebnisse zweier aufeinander folgender Spieltage zu Gruppen vereinigt wurden.

---

[1]) Die Zusammenstellungen der Serien u. dergl. für jeden einzelnen Spieltag, welche in dem Henri'schen Buche mitgeteilt werden, sind nach andern Prinzipien ausgeführt als die unserigen und waren daher für mich unbrauchbar.

Tabelle V.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
1	11483	11173	11184	1,00
2	11467	5428	5461	1,00
3	11451	2637	2704	0,98
4	11435	1281	1343	0,95
5	11419	622	668	0,93
6	11403	302	317	0,95
7	11387	147	143	1,03
8	11371	71	63	1,13
9	11355	35	34	1,03
10	11339	17	7	2,43
11	11323	8	2	4,00
12	11307	4	0	∞
13	11291	2	0	∞
14	11275	1	0	∞

Diese Tabelle zeigt, dass für die untersuchten Fälle die Gruppen à 12, 13 und 14 nicht vorkommen, obgleich es den herkömmlichen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen zufolge durchaus zu erwarten wäre, dass sie sich vorfänden. Die normale Dispersion würde eine Gruppe à 14, 2 Gruppen à 13 und sogar 4 Gruppen à 12 aufweisen. Die d'Alembert'sche Behauptung wird also durch diese Tabelle bestätigt. Die Ergebnisse unserer Spielresultate lehren aber auch, dass mit zunehmender Gruppengrösse innerhalb gewisser Grenzen das Verhältnis der wahrscheinlichen Anzahl der reinen Gruppen zu deren wirklicher Anzahl stets grösser wird: innerhalb der drei grössten Gruppengrössen, wo reine Gruppen noch vorkommen, bleibt mit wachsender Gruppengrösse die wirkliche

Anzahl der reinen Gruppen hinter der wahrscheinlichen Anzahl verhältnismässig immer mehr zurück.

Die folgende Tabelle ist nun gebildet aus den Spielresultaten, welche der „Monaco“ Nr. 274 für das Roulettespiel in Monte-Carlo in den Tagen vom 21. März bis zum 5. April 1898 mitteilt.

Tabelle VI.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	$\frac{\text{Wahrsch. Anzahl}}{\text{Wirkl. Anzahl}}$
1	8013	7796	7807	1,00
2	7997	3785	3637	1,04
3	7981	1838	1651	1,11
4	7965	892	776	1,26
5	7949	433	351	1,23
6	7933	210	154	1,37
7	7917	102	66	1,55
8	7901	50	26	1,96
9	7885	24	9	2,67
10	7869	12	1	12,00
11	7853	6	0	∞
12	7837	3	0	∞
13	7821	1	0	∞
14	7805	1	0	∞

Auch diese Tabelle zeigt uns, dass die grösseren reinen Gruppen, entgegen der herrschenden Auffassung, nicht vorkommen. Auch sie lehrt, dass innerhalb gewisser Grenzen mit wachsender Gruppengrösse die wirkliche Anzahl der reinen Gruppen hinter der wahrscheinlichen Anzahl verhältnismässig immer mehr zurückbleibt.

Mit welcher Gruppengrösse beginnt nun das Überwiegen der wahrscheinlichen Anzahl der reinen Gruppen über die korrespondierende wirkliche Anzahl? Wenn man Tabelle VI isoliert betrachtet, so ist man geneigt, anzunehmen, dass schon bei den Gruppen à 2 die reinen Gruppen seltener vorkommen als die sogenannte normale Dispersion erwarten lässt. Tabelle V lehrt dagegen, dass die fragliche Thatsache bei Gruppen, die kleiner sind als 7, jedenfalls nicht allgemein zutrifft, — ein Ergebnis, das sich demjenigen nähert, das wir oben an der Hand unserer Versuche gewonnen haben.

Um zu sehen, ob die aus den Tabellen V und VI resultierende Thatsache eines Wertes p wirklich von allgemeiner Bedeutung sei, habe ich weitere Untersuchungen unternommen. Als Material für dieselben wurden wiederum Spielergebnisse aus Monte-Carlo, aber auch solche aus den Kasinos in Spaa und Dinant, sämtliche nach Mitteilungen des „Monaco", benützt. Diese Zeitung, welche die Spielresultate von Monte-Carlo regelmässig bringt, enthält nämlich gelegentlich auch solche anderer Spielorte.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in den folgenden Tabellen mitgeteilt. Auf die äusserst mühevolle Auszählung und Behandlung der Gruppen 1—4 wurde diesmal verzichtet, was, wie sich gleich zeigen wird, für die zu beantwortende Frage nicht weiter in Betracht kam.

Tabelle VII.

Das Material ist entnommen aus Nr. 271—274 des „Monaco" und bezieht sich auf Spiele, die in der Zeit vom 2.—29. Januar 1893 in Monte-Carlo ausgeführt wurden.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
5	12173	663	918	0,72
6	12145	322	453	0,74
7	12117	156	194	0,80
8	12089	76	73	1,04
9	12061	38	31	1,23
10	12033	18	12	1,50
11	12005	9	5	1,80
12	11977	4	1	4,00
13	11949	2	0	∞
14	11921	1	0	∞

Tabelle VIII.

Das Material ist entnommen aus Nr. 271 und 272 des „Monaco" und bezieht sich auf Spiele, die in der Zeit vom 2.—15 Januar 1893 in Dinant ausgeführt wurden.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
5	6211	338	284	1,19
6	6197	164	123	1,33
7	6183	80	54	1,49
8	6169	39	25	1,56
9	6155	19	13	1,46
10	6141	9	4	2,50
11	6127	4	0	∞
12	6113	2	0	∞
13	6099	1	0	∞
14	6085	1	0	∞

Tabelle IX.

Das Material ist entnommen aus Nr. 327—331 des „Monaco“ und bezieht sich auf Spiele, die in der Zeit vom 30. Dezember 1895 bis zum 2. Februar 1896 in Monte-Carlo ausgeführt wurden.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
5	15312	833	947	0,87
6	15277	404	491	0,82
7	15242	197	245	0,80
8	15207	95	118	0,83
9	15172	46	53	0,87
10	15137	23	25	0,92
11	15102	11	9	1,22
12	15067	5	0	∞
13	15032	2	0	∞
14	14997	1	0	∞

Tabelle X.

Spielort: Spaa. Das übrige wie in Tabelle IX. Für diejenigen, welche diese Tabelle nachprüfen wollen, sei bemerkt, dass die in den fraglichen Zeitungen unter den Spielresultaten von Monte-Carlo stehenden kleinen Nachträge für diese Tabelle nicht benützt wurden.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
5	26909	1467	1439	1,02
6	26874	712	692	1,03
7	26839	347	328	1,06
8	26804	170	154	1,10
9	26769	82	73	1,12
10	26734	41	34	1,21
11	26699	19	13	1,45
12	26664	9	3	3,00
13	26629	5	0	∞
14	26594	2	0	∞

Diese Tabellen lehren zunächst dasselbe, was aus Tabelle V und VI folgt: die grösseren reinen Gruppen kommen im Gegensatz zu dem, was man nach der herkömmlichen Lehre von der normalen Dispersion erwarten sollte, nicht vor und die wirkliche Anzahl der reinen Gruppen bleibt von einer bestimmten Gruppengrösse an (wir wollen dieselbe mit g bezeichnen) mit wachsender Gruppengrösse verhältnismässig immer mehr zurück.

Endlich wurde aus den Tabellen V—X eine neue konstruiert. Jede Zahl der zweiten, dritten und vierten Kolumne dieser Tabelle XI ist gebildet durch Addition der entsprechenden Werte in den Tabellen VI—X. Die grossgedruckten Zahlen der letzten Kolumne dieser Tabelle XI sind gebildet durch Division der dritten durch die vierte Kolumne derselben Tabelle.

Tabelle XI.

Gruppen à	Anzahl aller benützten Gruppen	Wahrscheinliche Anzahl der reinen Gruppen	Wirkliche Anzahl der reinen Gruppen	Wahrsch. Anzahl / Wirkl. Anzahl
5	79973	4356[1]) [4358]	4607	0,95
6	79829	2114 [2116]	2230	0,95
7	79685	1029 [1028]	1030	1,00
8	79541	501 [499]	459	1,09
9	79397	244 [242]	213	1,15 [1,14]
10	79253	120 [118]	83	1,45
11	79109	57	29	1,97
12	78965	27 [28]	4	6,75 [7,00]
13	78821	13	0	∞
14	78677	6 [7]	0	∞

[1]) Die gross gedruckten Werte dieser Kolumne 3 der vorliegenden Tabelle XI sind infolge der Abkürzungen in den Tabellen V—X teilweise etwas ungenau. Wenn man die Werte der Kolumne 3 aus Kolumne 2

Aus dieser Tabelle scheint zu folgen, dass der Wert von p für die Rot- und Schwarzergebnisse des Roulettespiels im allgemeinen gleich 12 ist.

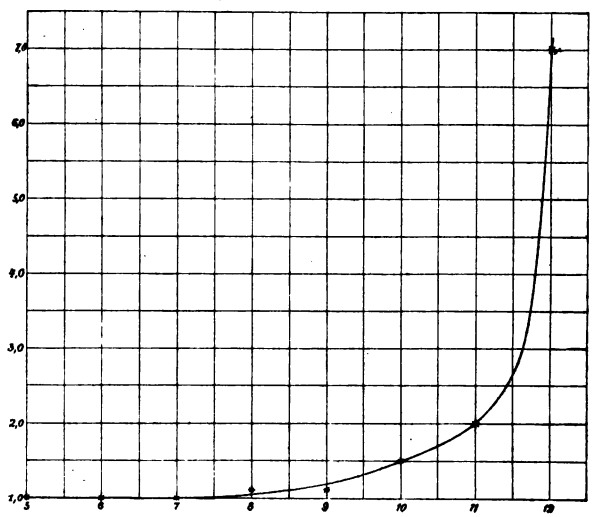
§ 9. Allgemeine Bedeutung der gewonnenen Resultate.

Werden wir nun, was für das Roulettespiel festgestellt wurde, auf alle Fälle übertragen dürfen, auf welche man die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendet? Wir haben oben gezeigt, dass die Anschauungen, die man sich auf Grund der üblichen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den wirklichen Verlauf des Geschehens bildet, nicht übereinstimmen mit denjenigen Überlegungen, die sich uns im Anschluss an die induktiven Wissenschaften aufdrängen: wir haben auf Grund logischer Erwägungen behauptet, dass die Annahme, dass irgendwo alle denkbaren Gestaltungen einer Gruppe gleich wahrscheinlich seien, aufgegeben werden müsse, weil einzelne denkbare Ergebnisgruppen nicht vorkämen. Jetzt haben wir gesehen, dass sich unsere Ansichten für das Roulettespiel bestätigen. Da nun nicht abzusehen ist, welche spezifische Eigentümlichkeit des Roulettespieles die Bestätigung unserer Darlegungen bewirkt haben soll, und da unsere logischen Überlegungen ganz allgemeiner Natur waren, so dürfen wir jetzt allerdings unsern Ergebnissen auch eine ganz allgemeine Bedeutung zuschreiben. Freilich die Werte von p werden variieren mit den verschiedenen objektiven Verhältnissen, welche wir in Betracht ziehen: sie werden vielleicht andere sein beim Münzwerfen, andere beim Würfelspiel. Ja es mag

ebenso berechnet, wie die Werte der Kolumne 3 der Tabellen V—X berechnet wurden (vergl. p. 12 f.), so erhält man zum Teil abweichende und genauere Resultate. Dies sind diejenigen, welche in kleinem Druck und in Klammern mitgeteilt sind. An zwei Stellen erhält man in der fünften Kolumne der Tabelle XI verschiedene Werte, je nachdem man die grossgedruckten oder die genaueren klein gedruckten Zahlen der Kolumne 3 benützt. Auch in Kolumne 5 sind diese genaueren Werte in kleinem Druck und in Klammern mitgeteilt. Für die Kurve am Schluss dieses Kapitels wurden die genaueren Werte der Kolumne 5 benützt.

Fälle geben, wo p den ungefähren Wert von 1000 oder einen grösseren erreicht. Bei vielen Thatsachenreihen, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt wird, sind offenbar auch Momente vorhanden, welche eine spezifische Eigentümlichkeit der Resultate bedingen können, Momente, die denjenigen ähnlich sind, die wir beim Kartenspiel kennen gelernt haben. Aber all' dies spricht uns nicht das Recht ab, zu behaupten, dass reine Gruppen, die eine bestimmte Grösse überschreiten, überhaupt nicht vorkommen. Dass auch die Thatsache, dass von einer gewissen kleinen Gruppengrösse g an bis zu der grösseren Gruppengrösse p das Verhältnis der wahrscheinlichen Anzahl der reinen Gruppen zu deren wirklicher Anzahl stets wächst, eine allgemeine Bedeutung hat, lässt sich, soweit ich sehe, nicht strikte behaupten, wenngleich eine solche Annahme sehr plausibel erscheint.

Im folgenden mag nun eine Kurve mitgeteilt werden, welche die Ergebnisse von Tabelle XI versinnbildlicht. Auf der Abscisse sind die Gruppengrössen (Tabelle XI, Kolumne 1) abgetragen, auf der Ordinate die entsprechenden Quotienten (Tabelle XI, Kolumne 5).



§ 10. Ergänzung der Untersuchungen des § 8.

Das vorliegende Kapitel, sowie überhaupt die ganze Schrift waren schon im September des Jahres 1898 im wesentlichen abgeschlossen. Im Oktober desselben Jahres kam ich nun bei Gelegenheit einer Reise durch Frankreich nach Nizza und Monte-Carlo, wo ich mehrfach ernsten Zweifeln an der Echtheit der Publikationen des „Monaco“ begegnete, ohne dass es mir gelungen wäre, die Korrespondenten dieses Blattes in Monte-Carlo kennen zu lernen. Wenn indessen auch die Publikationen dieses Blattes gefälscht sein sollten, so ist doch anzunehmen, dass sie auf Grund irgend welcher Spielergebnisse angefertigt sind, mögen sie nun aus älteren Spielresultaten abgeschrieben, mögen sie nach den Ergebnissen eines privatim angestellten Roulettespiels in Paris oder sonstwie entstanden sein. Für uns ist es aber offenbar belanglos, ob wir es gerade mit den Ergebnissen, die z. B. in Monte-Carlo gewonnen wurden oder mit anderen zu thun haben. Die Fälschung wäre für unsere Untersuchungen erst dann bedenklich, wenn absichtlich die Werte von p geringer angegeben wären, als in der That der Fall ist. Eine derartige Fälschung im Sinne einer konstanten Abweichung von der nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartenden Verteilung der Resultate ist aber nur dann denkbar, wenn der „Monaco“ den Interessen der „Systemiers“ dient, d. h. desjenigen, welche um Geld scheinbare Regeln des sicheren Gewinnes verkaufen. Sollte dies nun aber auch der Fall sein, so wäre es doch gewiss ein ausserordentlicher Zufall, wenn sich gerade der von mir theoretisch deduzierte Thatbestand in den Permanenzen des „Monaco“ infolge einer Fälschung verwirklicht fände. — Dazu kommt, dass die von mir behauptete Thatsache über den Wert p und die aus den Spielresultaten deduzierte Thatsache eines Wertes g durchaus nicht den herkömmlichen Anschauungen der Systemspieler entspricht. Diese sind vielmehr der Meinung, man müsse,

wenn eine Serie angefangen habe, immer auf die herausgekommene Farbe setzen, um zu gewinnen.

Derartige Überlegungen bestärkten mich in der Ansicht, dass die bisher angestellten statistischen Untersuchungen allerdings für meinen Zweck ausreichend seien. Um aber sicher zu gehen, habe ich nach meiner Rückkehr nach Deutschland zweierlei unternommen. Erstens liess ich von einem Detektivbureau Untersuchungen über das Zustandekommen der vom „Monaco" publizierten Resultate anstellen. Zweitens untersuchte ich noch ca. 70000 Spielergebnisse aus Monte-Carlo, von denen ca. 60000 aus den als zuverlässig geltenden Henri'schen Berichten (vom 15. September bis 15. Dezember 1887) entnommen wurden, während ca. 10000 durch die 1891 zu Paris bei R. Godfroy (Rue d'Hauteville 11) erschienenen Permanenzen repräsentiert waren, die in der Zeit vom 1.—15. Oktober 1891 in Monte-Carlo aufgenommen wurden. Nimmt man diese Fälle zusammen mit den in Tabelle V behandelten Permanenzen der Henri'schen Kollektion, so gelangt man zu ca. 80000 Fällen, zu ebenso vielen also, als der Tabelle XI und der obigen Kurve zugrunde liegen. Zerlegt man diese Resultate in die Ergebnisse von je 15 aufeinander folgenden Tagen oder, was dasselbe bedeutet, in 8 Fraktionen von je ca. 10000 Fällen, so zeigen 6 Abteilungen deutlich die in diesem Kapitel dargelegten Gesetzmässigkeiten. Doch sind dabei die grössten p-Werte gleich 13 und nicht gleich 12. Eine Fraktion à ca. 10000 folgt ungefähr der normalen Dispersion mit einem p-Wert von 14; eine andere zeigt allerdings eine reine Gruppe à 16. Doch wird man diese vereinzelte Abweichung nicht gegen die Ergebnisse dieses Kapitels ins Feld führen können, wenn sie gleich zeigt, dass der Wert p erheblich grösser sein kann, als der erste Teil dieses Kapitels zu lehren scheint. — Die zweimonatlichen Bemühungen des in Anspruch genommenen Bureaus haben zu keinem

Resultat geführt. Doch die Resultate der zweiten ca. 80000 Fälle scheinen mir in Verbindung mit den obigen Bemerkungen (p. 28 f.) und den ersten ca. 80000 Fällen die Richtigkeit meiner Ausführungen wahrscheinlich zu machen. Eine überzeugende Begründung der im ersten Kapitel vertretenen Ansichten, beansprucht erst das folgende Kapitel zu geben, wo ich versuchen werde, meine Behauptungen aus plausibeln Thatsachen zu deduzieren.

III. Kapitel.

Naturphilosophische Theorie der Dispersion.

§ 11. Notwendigkeit einer naturphilosophischen Theorie. Naturphilosophische Theorie der Glücksspiele.

Nicht mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat es diese Arbeit zu thun, sondern mit Vorgängen in der Natur, auf welche man die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beziehen pflegt. Auf Grund induktiver Betrachtung der Wirklichkeit wurde im § 4 behauptet, dass es unter den successiven Naturvorgängen, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen werden, keine gäbe, für welche alle Gruppen à n unter allen Umständen vorkämen und mit dieser Ansicht stimmen die statistischen Ergebnisse unserer Untersuchungen überein. Jetzt soll die Existenz eines p-Wertes deduziert werden. Eine solche Ableitung wird aber natürlich nicht wie die Ansätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grund rein logischer Überlegungen gewonnen werden können. Wir müssen vielmehr von plausibeln Naturvorgängen ausgehen, wenn wir eine Naturthatsache ableiten wollen. Unsere Theorie wird daher eine naturphilosophische sein müssen.

Wir halten uns zunächst wieder an das Beispiel mit dem Geldstück. Wenn eine Person in der angegebenen Weise hundertmal mit einem Geldstück wirft, so führt sie periodisch drei komplizierte Thätigkeiten aus, das Schütteln des Bechers, das Auswerfen der Münze und das Einlegen der Münze in den Würfelbecher. Diese drei komplizierten Thätigkeiten vereinigen sich zur Gesamtthätigkeit des Werfens.

Diese Gesamtthätigkeit des Werfens wird nun, wenn eine Person hundertmal wirft, nicht hundertmal in ganz derselben Weise ausfallen. Es ist nicht nur im höchsten Grade unwahrscheinlich, sondern vielmehr durchaus ausgeschlossen, dass eine Person, die hundertmal wirft, die fragliche Gesamtthätigkeit in absolut identischer Weise ausführt. Der Mensch ist keine Maschine und nicht so eingerichtet, dass seine komplizierten Thätgkeiten oft nacheinander in absolut identischer Weise ablaufen können.

Wie es aber ausgeschlossen ist, dass eine Person die hundertmal wirft, die fragliche Gesamtthätigkeit hundertmal in absolut identischer Weise ausführt, so ist es auch unmöglich, dass das Werfen einer bestimmten Person alle denkbaren Gestaltungen annimmt. Wir haben im § 4 gesehen, dass unendlich viele Bewegungen des Armes u. s. f. denkbar sind. Weil daher unendlich viele Gestaltungen der Gesamtthätigkeit des Werfens denkbar sind, so ist es eo ipso ausgeschlossen, dass bei einer endlichen Anzahl von Würfen alle denkbaren Gestaltungen des Werfens ausgeführt werden können. Immerhin werden die einzelnen Würfe von einander verschieden sein, ja wenn eine Person hundertmal nacheinander oder überhaupt beliebig oft wirft, brauchen nicht einmal zwei Würfe identisch zu verlaufen.

Bei aller möglichen und wirklichen Verschiedenheit der Gesamtthätigkeit des Werfens erfolgen aber die wirklichen Gestaltungen derselben nicht in dem Sinne regellos,

dass keinerlei Gestaltungstypus vorhanden ist. So ausgeschlossen es ist, dass ein des Schreibens Kundiger den Buchstaben a immer in derselben Weise schreibt, so unmöglich es ist, dass er demselben alle denkbaren Formen giebt, so zweifellos ist es, dass sich für jeden, der schreibt, ein bestimmter Typus einstellt, von dem seine wirklich geschriebenen a mehr oder weniger differieren. An vielen ähnlichen Beispielen lässt sich zeigen, dass, wenn eine Person eine Thätigkeit sehr oft periodisch ausführt, sich ein gewisser Typus einstellt, von dem grössere oder geringere Abweichungen vorkommen. Wir werden daher annehmen müssen, dass diese Thatsache auch zutrifft für Fälle, wo sie nicht so in die Augen springend ist, wie für das Beispiel mit dem Buchstaben a und für ähnliche Beispiele. Wir werden ihr daher eine allgemeine Bedeutung zuerkennen und sie daher auch auf das Werfen eines Geldstückes ausdehnen müssen. Dabei sei sogleich bemerkt, dass es für uns genügt, den Satz, dass periodisch sehr oft wiederkehrende Thätigkeiten des Menschen sich um einen gewissen Typus gruppieren, in der allgemeinsten und unbestimmtesten Weise zu interpretieren.

Wir nehmen nun an, dass unser Geldstück keinerlei Eigenschaften hat, welche für das Eintreten des einen Resultates günstiger sind als für das Eintreten des andern und wir nehmen ferner an, dass auch keine anderen konstanten Bedingungen vorhanden sind, welche eines der beiden Ergebnisse begünstigen. Wir wissen dann, dass das Resultat Wappen ebenso möglich ist als das Resultat Zahl d. h. jeder denkbaren Gestaltung des Werfens, welche das Resultat Zahl herbeiführt, entspricht eine andere genau gleich mögliche, welche das Resultat Wappen herbeiführt. Hieraus folgt aber notwendig, dass der Typus, um welchen sich die Würfe gruppieren, weder eine dauernde Begünstigung des Resultates Wappen noch eine solche des Resultates Zahl einschliessen kann.

Wenn dies aber der Fall ist, so ist es ganz ausgeschlossen, dass man bei beliebig langem Fortsetzen des Werfens oder (was dasselbe bedeutet) bei unendlich vielen Würfen das Resultat Zahl erhält. Wäre dies nämlich der Fall, so würde man hieraus schliessen müssen, dass die Wurfbewegungen sich um einen Typus gruppieren, welcher das Resultat Wappen ausschliesst. Dies steht aber in offenbarem Widerspruch mit dem vorhin abgeleiteten Satz, nach welchem der Typus, um den sich die Wurfthätigkeiten gruppieren, weder die Begünstigung des Resultates Wappen noch die des Resultates Zahl einschliesst. Demnach ist es unmöglich, dass bei beliebig vielen von einer Person ausgeführten Würfen immer dasselbe Resultat erscheint.

Wenn es aber ausgeschlossen ist, dass unendlich oft nacheinander Wappen bezw. Zahl oben liegt, so heisst dies nichts anderes als, dass nur eine endliche Anzahl nacheinander das Resultat Wappen bezw. Zahl auftreten kann. Es muss also einen Wert p geben, der die grösste reine Gruppengrösse bedeutet, die beim Werfen mit einem Geldstück vorkommt.

Wie gross der Wert von p ist, können wir freilich nicht theoretisch ableiten. Er hängt ab von der Art und Weise, wie sich die successiven Thätigkeiten im einzelnen gruppieren, worüber wir zu wenig orientiert sind, als dass wir die ungefähre Grösse von p deduzieren könnten. Dagegen können wir uns allerdings klar machen, dass, wenn wir z. B. mehrere Male je tausend Würfe thun, es ganz ausgeschlossen ist, dass p einmal den Wert 2 und ein anderes Mal den Wert 500 erreicht. Wenn sich die Gesamtthätigkeiten des Werfens um einen Typus gruppieren, welcher weder das Resultat Zahl noch das Resultat Wappen dauernd begünstigt, so ist es (gleiche konstante Bedingungen vorausgesetzt) einleuchtend, dass sich die einzelnen Würfe in einer gewissen typischen

Weise um ihren Typus gruppieren. Wenn man also zwei grosse Gruppen (also jeweils tausend successive Würfe) betrachtet, so werden sich die Würfe in beiden Fällen nicht in so hervorragend differenter Weise um ihren Typus gruppieren, dass wir für p so enorm verschiedene Werte erhalten. Die Werte von p werden also für verschiedene Versuchsreihen eine gewisse Übereinstimmung aufweisen müssen.

Wir haben bis jetzt angenommen, unsere Münze sei so beschaffen, dass sie weder das Resultat Wappen noch das Resultat Zahl begünstigt. Wenn wir nun z. B. annehmen, sie begünstige das Resultat Zahl in doppelt so hohem Masse als das Resultat Wappen, so müssen wir in Anlehnung an unsere obigen Ausführungen auch annehmen, dass die successiven Thätigkeiten des Werfens sich um einen Typus gruppieren, welcher dem Eintreffen des Ergebnisses Zahl doppelt so günstig ist als dem Eintreten des Resultates Wappen. Es ist dann leicht einzusehen, dass für diesen Fall ganz analoge Überlegungen zutreffend sind, wie diejenigen, welche wir eben für das Geldstück angestellt haben, von dem wir annahmen, dass es keines der beiden Resultate begünstige. Und analoge Überlegungen gelten auch, wenn wir andere Annahmen über die Möglichkeit der beiden Resultate machen.

Wir wollen jetzt annehmen, unsere Münze werde nicht immer von derselben, sondern successive von einer andern Person geworfen. Auch in diesem Fall werden sich die Gesamtthätigkeiten des Werfens um einen gewissen Typus gruppieren. Die Menschen sind weder so eingerichtet, dass mehrere ein und dieselbe Thätigkeit in absolut identischer Weise ausführen können, noch sind eine endliche Anzahl von Menschen imstande, einer bestimmten Thätigkeit alle denkbaren Formen zu geben. Wenn wir den Buchstaben a von vielen Personen schreiben lassen, gruppieren sich die ver-

schiedenen a um einen gewissen Typus. Wenn wir mittels der Anschützschen Schnellphotographie die Bewegungsphasen vieler gehender Männer aufnehmen, so können wir einen gewissen Typus des menschlichen Gehens konstatieren u. s. w. u. s. w. So dürfen wir auch annehmen, dass, wenn verschiedene Personen in der angegebenen Weise mit einem Geldstück werfen, sich ein gewisser Typus einstellt. Wir dürfen daher die obigen Betrachtungen auch auf den Fall ausdehnen, wo das Werfen durch mehrere Personen ausgeführt wird: auch hier ist der Fall, dass, wie viele Personen wir auch successive werfen lassen, immer und immer ein und dasselbe Resultat auftritt, ausgeschlossen, da hieraus folgen würde, dass der Typus, um welchen sich die Wurfthätigkeiten gruppieren, eines der denkbaren Resultate ausschliesst.

Wir wollen endlich den Fall setzen, wir hätten es nicht mit einer Münze zu thun, sondern mit einem Körper, der nicht nur (wie die Münze) auf zwei, sondern auf drei Seiten fallen kann. Die Chancen für das Obenliegen der einzelnen Seiten seien durch die Zahlen $\frac{18}{37}, \frac{18}{37}, \frac{1}{37}$, bestimmt. Auch hier ist es wiederum plausibel, dass sich die Gesamtthätigkeiten des Werfens um einen gewissen Typus gruppieren. Man wird ferner annehmen müssen, dass $\frac{18}{37}$ aller möglichen Gestaltungen des Werfens das Resultat α, $\frac{18}{37}$ das Resultat β und $\frac{1}{37}$ das Resultat γ ergiebt. Die Verbindung beider Annahmen zeigt nun wieder, dass sich die Würfe um einen Typus gruppieren, der die Resultate α, β, γ in dem angegebenen Zahlenverhältnis begünstigt und hieraus folgt dann, dass es unmöglich ist, dass man bei beliebig langem Werfen immer und immer das Resultat α (β, γ) erhält. Es muss

also einen Wert p geben, der die grösste mögliche Anzahl aufeinander folgender α- bezw. β-Resultate bedeutet, und einen Wert p_1, der die grösste mögliche Anzahl aufeinander folgender γ-Werte bezeichnet. Wenn die Werte von p auch für verschiedene grosse Versuchsreihen verschieden sein mögen, so ist doch infolge der typischen Gruppierungsweise der Gesamtthätigkeiten anzunehmen, dass sich diese Verschiedenheiten innerhalb mässiger Grenzen bewegen. — Nachdem vorhin gezeigt wurde, dass unsere Überlegungen, die sich auf das Geldstück bezogen, auch zutreffen für den Fall, dass mehrere Personen sich an dem Werfen beteiligen, ist klar, dass auch die Bemerkungen über das Werfen mit dem Körper Geltung haben, gleichgültig, ob sich eine oder mehrere Personen an dem Werfen beteiligen.

Bei dem Roulettespiel in Monte-Carlo, Dinant und Spaa wird die Roulette nicht während eines ganzen Spieltages von ein und derselben Person bedient. Derjenige „Croupier", welcher die Kugel und die Rouletteschеibe in Bewegung setzt, wird nach cirka 60 bis 100 Spielen von einem anderen abgelöst. Aber auch für das Roulettespiel lässt sich mit Recht (aus den eben bei der Behandlung des successiven Werfens verschiedener Personen entwickelten Gründen) behaupten, dast die aufeinanderfolgenden, für die Resultate in Betracht kommenden Gesamtthätigkeiten, die natürlich weder alle denkbaren Gestaltungen annehmen, noch absolut identisch sein können, sich um einen gewissen Typus gruppieren, und es lassen sich dann für die Ergebnisse Rot, Schwarz und Null dieselben Betrachtungen anstellen, die wir eben für den Körper, der auf drei Seiten fallen kann, ausgeführt haben.

Somit lässt sich auch für das Roulettespiel zeigen, dass es für die Resultate Rot und Schwarz einen Wert p geben muss, der für verschiedene grosse Versuchsreihen nur innerhalb mässiger Grenzen schwanken kann. Die Ableitung der

empirisch bestätigten Thatsache aber, dass zwischen einer kleinern Gruppengrösse g und der grösseren Gruppengrösse p das Verhältnis der warscheinlichen Anzahl der reinen Gruppen zu deren wirklicher Anzahl wächst, wird man ohne nähere Kenntnis die Vorgänge bei den Thätigkeiten des Kugelwerfens u. s. f. wohl kaum theoretisch ableiten können. —

Die Bemerkungen dieses § können offenbar als Schema dienen, an der Hand dessen auch alle andern Glücksspiele, für die unsere Thatsachen gelten, betrachtet werden können.

§ 12. Naturphilosophische Theorie der Beobachtungsfehler und der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft.

Im § 4 wurde behauptet, dass in allen Fällen, wo man die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf successive Vorgänge anzuwenden pflegt, die grösseren reinen Gruppen nicht vorkommen. Für die empirische Prüfung dieses Satzes und für seine Deduktion wurden aber bisher nur Glücksspiele in Anspruch genommen. Dieses Gebiet ist jedoch durchaus nicht das einzige, in welchem die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf successive Vorgänge angewandt wird: dies ist auch bei der Theorie der Beobachtungsfehler und bei der Behandlung der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft der Fall.

Wenn wir eine wissenschaftliche Messung auszuführen haben, so machen wir in der Regel einen gewissen Fehler. Dieser Fehler ist zum Teil abhängig von konstanten Bedingungen, welche im Sinne irgend einer Abweichung auf alle Ablesungen gleichmässig einwirken. Der Teil des Fehlers, welcher auf derlei konstante Bedingungen gegründet ist, heisst der konstante Fehler. Der andere Teil heisst der variable Fehler. Man denkt sich diesen als ein Produkt von unendlich vielen oder wohl auch nur von sehr vielen elementaren Fehlern, von denen ein jeder mit der ihm eigentümlichen Wahrscheinlichkeit eintritt. Die Berechnung des

wahrscheinlichen variabeln Fehlers für eine bestimmte Versuchsreihe, und die Lösung verwandter Probleme lehrt uns die sogenannte Theorie der Beobachtungsfehler.

Hier ist es wiederum aus den Seite 31 entwickelten Gründen klar, dass sich die für den Ausfall des Messungswertes charakteristischen Thätigkeiten um einen gewissen Typus gruppieren. Im Begriff des variabeln Fehlers aber liegt es, dass jedem denkbaren elementaren, variabeln Fehler $+ \alpha$ ein anderer ganz genau gleich möglicher und gleich grosser Fehler $- \alpha$ entspricht, welcher von dem absolut richtigen Beobachtungsresultat im entgegengesetzten Sinne abweicht als der Fehler $+ \alpha$. Die Verbindung beider Thatsachen ergibt wieder, dass der Typus, um welchen sich die fraglichen Thätigkeiten gruppieren, weder der positiven noch der negativen Richtung eines variabeln Fehlers dauernd günstig sein kann. Hieraus folgt die Unmöglichkeit, dass bei beliebig vielen Versuchen jedesmal derselbe elementare variable Fehler $(+ \alpha)$ eintritt, und hieraus ergibt sich die Thatsache, dass derselbe elementare variable Fehler nur p-mal nacheinander eintreten kann. Da auch hier bei fortwährend gleichen konstanten Bedingungen eine typische Gruppierungsweise der für die Fehler charakteristischen Thätigkeiten eine einleuchtende Annahme ist, so wird man auch hier behaupten dürfen, dass die Werte von p für verschiedene grosse Zahlen successiver Versuche nur innerhalb mässiger Grenzen schwanken können. — Alles, was von den Elementen der variabeln Fehler bisher auseinandergesetzt wurde, gilt natürlich auch von den sucessiven Gesamtfehlern, welche aus diesen elementaren Fehlern zusammengesetzt sind.

Die Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft, die Eheschliessungen, die ehelichen und unehelichen Geburten, die Selbstmorde u. s. w. zeigen im allgemeinen keine normale Dispersion: ihre Häufigkeit pflegt mit gewissen nachweis-

baren variabeln Verhältnissen zu schwanken. Die einzige Massenerscheinung, welche eine ungefähre normale Dispersion aufweist, ist das Geschlechtsverhältnis der Geborenen.[1]) Ich bin nun der Meinung, dass auch für die Knaben- und Mädchengeburten die Thatsachen Geltung haben, die wir für das Glücksspiel und die Beobachtungsfehler als allgemein zutreffend abzuleiten versucht haben. Offenbar gruppieren sich auch die Vorgänge, die für die successiven Knaben- und Mädchengeburten in einer Stadt charakteristisch sind, um einen gewissen Typus. Anderseits wissen wir aus der Erfahrung, dass die Häufigkeit der Knabengeburten sich zur Häufigkeit der Mädchengeburten wie 106 zu 100 verhält. Dieses Verhältnis wird doch nun offenbar in dem Typus begründet sein, um welchen sich die für den Geschlechtsausfall charakteristischen Vorgänge gruppieren. So lassen sich denn für das Geschlechtsverhältnis der Geborenen dieselben Betrachtungen durchführen, die für die Glücksspiele und die Beobachtungsfehler mitgeteilt wurden.

§ 13. Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der theoretischen Physik.

In der theoretischen Physik spielt die Wahrscheinlichkeit gleichzeitiger Vorgänge eine Rolle. Diese Schrift soll sich aber nur auf successive Vorgänge beziehen und kann daher die Überlegungen der theoretischen Physik nicht unter dem Gesichtspunkte betrachten, unter welchem bisher die Glücksspiele, die Beobachtungsfehler und die successiven Geburten behandelt wurden, — wenngleich ich durchaus nicht bestreiten will, dass die Darlegungen dieser Arbeit

---

[1]) Vergl. Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft. 1877. p. 64. Für eine exakte Prüfung der Frage der Dispersion im Sinne der Untersuchungen unseres 2. Kapitels ist die von Lexis angewandte Methode nicht ausreichend.

eventuell auch auf gleichzeitige Vorgänge ausgedehnt werden müssen. Aber auch abgesehen davon, dass es sich in der theoretischen Physik um die Wahrscheinlichkeit gleichzeitiger Vorgänge handelt, hat überhaupt die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dieser Disziplin eine ganz andere Bedeutung als in den bisher behandelten Gebieten. Über die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der theoretischen Physik mögen wenige Worte gestattet sein, obgleich eine derartige Erörterung ausserhalb des engeren Themas dieser Schrift liegt. In der theoretischen Physik handelt es sich nicht darum, die Wahrscheinlichkeit gewisser Ereignisse oder einer bestimmten Dispersion zu bestimmen, sondern vielmehr darum, experimentell erwiesene Thatsachen, die wir als notwendig zu begreifen zur Zeit nicht in der Lage sind, wenigstens als sehr wahrscheinlich zu deduzieren.

Wenn wir ein Gas innerhalb eines durch feste Wände begrenzten Raumes sich selbst überlassen, so erfüllt es nach einiger Zeit den ganzen Raum gleichmässig, so zwar, dass an allen Stellen desselben gleicher Druck und gleiche Temperatur herrscht. Diese Thatsachen sind erwiesen und wir können sie jederzeit von neuem beobachten.

Derjenige Teil der Physik nun, der sich mit der Erklärung dieser Thatsachen beschäftigt, die kinetische Gastheorie ist z. Z. nur in der Lage, diese Thatsachen als wahrscheinliche begreiflich zu machen. Man denkt sich das Gas als bestehend aus einer endlichen Zahl von Molekülen und betrachtet alle denkbaren Bewegungsrichtungen dieser Moleküle als gleich wahrscheinliche, um dann zu zeigen, dass wenn man die Moleküle sich selbst überlässt, allerdings derjenige Endzustand des Gases am wahrscheinlichsten ist, welcher den oben genannten erwiesenen Thatsachen entspricht.

Das Verhältnis der genannten experimentell bewiesenen Thatsachen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung hat manche Forscher an der Giltigkeit jener Thatsachen irre gemacht. Ob aber ein experimenteller Thatbestand als erwiesen anzusehen ist, oder nicht, hängt doch wohl ausschliesslich von der Art und Weise ab, wie er festgestellt wurde, nicht aber davon, ob und wie es uns gelingt, denselben begreiflich zu machen. Nun wüsste ich aber nicht, warum die Experimente, durch welche jene Thatsachen bewiesen werden, an Zuverlässigkeit hinter irgend einem anderen Experiment der Physik oder Chemie zurückstehen sollen, und ich vermag daher die vielfach vertretene skeptische Behandlung der Tatsachen der kinetischen Gastheorie nicht zu billigen.

Am deutlichsten hat, soviel ich sehe, Fick[1]) den Standpunkt vertreten, den ich hier verwerfen zu müssen glaube. „Wir dürften uns gar nicht wundern", sagt Fick, „wenn wir in einer gleichmässig warmen Stube plötzlich ein auf dem Tisch liegendes Stück Papier in Flammen aufgehen sähen .... Die Möglichkeit dieses ganz besondern Zusammentreffens von Bedingungen ist ganz entschieden in den Voraussetzungen enthalten, welche bei der Deduktion des Satzes aus den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht wird." Letzteres ist allerdings richtig. Aber was geschieht oder nicht geschieht, hängt nicht von unserer Deduktion ab. Ob eine physikalische Thatsache zutrifft oder nicht, lässt sich durch Beobachtungen feststellen, und diese lehren allerdings, dass die Fick'sche Ansicht nicht zutreffend ist.

Dieselbe Rolle, welche die Wahrsscheinlichkeitsrechnung im Gebiet der kinetischen Gastheorie spielt, kommt ihr auch im Gebiet der mechanischen Wärmetheorie zu, deren experimentell bewiesenen zweiten Hauptsatz wir nur als sehr wahrscheinlich, nicht als notwendig zu begründen imstande sind.

[1]) Philosoph. Versuch üb. d. Wahrscheinlichkeiten Würzb. 1883 p. 37.

IV. Kapitel.

Folgerungen. Das Petersburger Problem.

§ 14. Ueber die Wahrscheinlichkeit einzelner Ereignisse.

Da überall, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf successive Fälle angewandt wird, die reinen Gruppen à p + 1 und die grösseren reinen Gruppen nicht vorkommen, so müssen wir für die unreinen Gruppen, die mehr als p Elemente enthalten, grössere Wahrscheinlichkeiten ansetzen, als bisher üblich war. Infolge dessen ändern sich offenbar teilweise wenigstens die Wahrscheinlichkeiten der Gruppen à 1, aus welchen jene Gruppen à p + x bestehen: wenn nämlich ein Ereignis p mal gefolgt ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe Ereignis noch einmal folgt, nicht etwa $^1/_2$, sondern 0 und die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein anderes Ereignis folgt, wird dann 1. Hiermit sind wir zu dem Ergebnis gelangt, dass für die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses diejenigen Ereignisse in Betracht kommen, welche diesem Ereignis vorhergegangen sind.[1]) Dies heisst eben, dass in der Wirklichkeit die successiven Resultate, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt wird, nicht so unabhängig von einander sind, als man gewöhnlich annimmt. Diese Thatsache hat nun offenbar eine grosse praktische Bedeutung vorläufig nicht. Haben wir doch selbst beim Roulettespiel nur eine ungefähre Vorstellung von der Grösse des Wertes p erhalten können. So unbedeutend aber die fragliche Thatsache vorläufig ist, so fruchtbar kann sie durch ausführliche statistische Untersuchungen werden. Sollten wir

[1]) Die hier entwickelte Ansicht hat schon d'Alembert (a. a. O. p. 289) vertreten. Auch die im folgenden § auf Grund unserer Thatsachen mitgeteilte Beleuchtung des Petersburger Problems findet sich im Prinzip wenigstens schon bei d'Alembert (a. a. O. p. 283).

nicht mit Hilfe solcher Untersuchungen über die Häufigkeit nicht nur der reinen, sondern auch der übrigen Gruppen allmählich zu besseren Wahrscheinlichkeitsansätzen gelangen, als solche nach rein logischen Prinzipien möglich sind? Sollten wir dann nicht auch einen gewissen Einblick in das Kausalverhältnis der Vorgänge gewinnen können, auf welche sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht?

§ 15. Das Petersburger Problem.

Die Thatsachen, die wir in den vorigen Kapiteln behandelt haben, sind auch geeignet, auf das sogenannte Petersburger Problem einiges Licht zu werfen. Bei der Darstellung und Behandlung dieses Problems müssen wir jedoch vorläufig von den in dieser Schrift mitgeteilten Thatsachen vollständig absehen. Die zuerst von Jakob Bernoulli gestellte Aufgabe, an welche das Petersburger Problem anknüpft, lautet so:

Peter wirft eine Münze in die Höhe und zwar so lange, bis sie nach dem Niederfallen die Kopfseite zeigt; geschieht dies nach dem ersten Wurf, so soll er Paul 1 Dukaten geben. Liegt erst nach dem zweiten Wurf Kopf oben, so soll er Paul 2 Dukaten geben. Fällt Kopf nach dem dritten Wurf, so erhält er 8 Dukaten u. s. f. Wie gross ist die Hoffnung Pauls?

Unter mathematischer Hoffnung versteht man das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit eines Resultates in die Grösse des mit diesem Resultat verbundenen Gewinnes; dieses Produkt bezeichnet offenbar zugleich die Summe, mit welcher Paul die ihm von Peter gestellte Gewinnaussicht in der für Peter billigen Weise zu bezahlen hat.

Wird nun das Spiel nach dem ersten Wurf abgebrochen, so beträgt die Hoffnung Pauls $\frac{1}{2^1} \cdot 1$, also einen halben

Dukaten. Wird das Spiel, wenn gleich Kopf fällt, nach dem ersten, in jedem Fall aber nach dem zweiten Wurf abgebrochen, so beträgt Pauls Hoffnung $\frac{1}{2^1} \cdot 2^0 + \frac{1}{2^2} 2^1$, also zwei halbe Dukaten. Wird das Spiel eventuell nach dem ersten, zweiten oder dritten, jedemfalls aber nach dem vierten Wurf abgebrochen, so beträgt Pauls Hoffnung

$$\frac{1}{2^1} \cdot 2^0 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^1 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2^4} \cdot 2^3$$

oder vier halbe Dukaten. Wird das Spiel spätestens nach dem n-ten Wurf abgeschlossen, so beträgt Pauls Hoffnung demnach $\frac{1}{2^1} \cdot 2^0 + \frac{1}{2^2} 2^1 \cdot \cdots \cdot + \frac{1}{2^n} 2^{n-1}$ oder n halbe Dukaten. Pauls Hoffnung beträgt also jeweils soviel halbe Dukaten als Spiele zugelassen werden. Wird daher ein Maximum der zulässigen Spiele nicht angegeben, werden also unendlich viele Würfe zugelassen, so ist es offenbar nicht möglich einen endlichen Wert für die Hoffnung des Paul anzugeben. Denn welche endliche Zahl w von Dukaten man auch angeben möchte, es liesse sich immer einwenden, dass es durchaus denkbar sei, dass Kopf erst beim w + xten Wurfe falle und dass die angegebene Hoffnung demnach zu klein sei. Man kann deshalb auch sagen: wenn unendlich viele Würfe zugelassen werden, ist Pauls Hoffnung unendlich gross.

In diesem Sinne ist die Aufgabe, an welche das Petersburger Problem anknüpft, von jeher gelöst worden. Neuerdings hat nun Pringsheim[1]) behauptet, man müsse den Fall $n = \infty$ ausschliessen, man dürfe n nur einen endlichen Wert beilegen, weil es als eine logische Unmöglichkeit erscheine,

---

[1]) Übersetzung von Daniel Bernoulli's Schrift „Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis p. 47. (1896).

„sich einen unendlich grossen Gewinn vorzustellen, welcher nach Schluss (!) des unendlich lange währenden Spieles zur Auszahlung gelangt.“ Dem gegenüber ist aber zu bemerken, dass, wenn auch unendlich viele Spiele zugelassen werden, der Gewinn doch immer ein endlicher ist und dass er immer nach einer ganz bestimmten endlichen Anzahl von Würfen fällig gedacht werden muss. Werden nämlich unendlich viele Würfe zugelassen und sollte der Fall eintreten, dass Peter bei unendlich vielen Würfen niemals das Resultat Kopf erzielt, so liegt es durchaus nicht im Sinne der Aufgabe, dass Paul einen Gewinn erhält. Denn die obige Aufgabe sagt nur, dass Paul gewinnt, wenn das erste, zweite, dritte Mal u. s. w. Kopf fällt. Sie sagt aber nicht, was Pringsheim annimmt, dass Paul einen Gewinn erhält, wenn niemals Kopf fällt. Es ist also durchaus nicht nötig, dass man den Fall $n = \infty$ ausschliesst. Will man aber trotzdem bei der Lösung der Aufgabe von diesem Fall absehen, so muss man die Hoffnung Pauls nach der oben mitgeteilten, nicht aber nach der Pringsheim'schen Formel berechnen. Letztere heisst so:

$$h = \frac{1}{2^1} \cdot 2^0 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^1 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 \cdots + \frac{1}{2^n} 2^{n-1} + \frac{1}{2^n} 2^n .$$

Diese Formel setzt voraus, dass, wenn beim nten Wurf Schrift fällt, Paul den Gewinn 2^n erhält, eine Voraussetzung, die in der obigen Aufgabe nicht die mindeste Begründung findet. Dass Pringsheim's Formel unrichtig ist, kann man übrigens am leichtesten an den Resultaten sehen, die sie für kleine Werte von n liefert. Setzt man $n = 1$, so erhält man:

$$h = \frac{1}{2^1} \cdot 2^0 + \frac{1}{2^1} \cdot 2^1 = 1{,}5$$

d. h. man erhält für die mathematische Hoffnung Pauls einen Wert, der grösser ist, als der Gewinn, den Paul dem Wortlaut der Aufgabe zufolge zu erwarten hat! Setzt man n gleich

2, so wird die Hoffnung gleich dem Gewinn, den Paul im günstigsten Fall erzielen kann!

Pringsheim's Einwand gegen die alte Lösung der Aufgabe des Petersburger Problems ist also nicht stichhaltig; diese Aufgabe ist oben offenbar mathematisch richtig gelöst worden. Das Resultat nun, dass bei Zulassung unendlich vieler Würfe Pauls Hoffnung unendlich gross sei, ist es, was man von jeher absurd und dem gesunden Menschenverstand schnurstracks zuwiderlaufend fand: schon J. Bernoulli hat gesagt und viele andere haben gleichfalls behauptet, dass, obgleich die Rechnung zeige, dass die Hoffnung des Paul unendlich gross sei, es keinen Vernünftigen gebe, der jene Hoffnung nicht gerne für 20 Dukaten verkaufen würde[1]). Das Petersburger Problem ist nun dieser Widerspruch zwischen den Ergebnissen der Rechnung und dem gesunden Menschenverstand.

Eine alte Lösung dieses Problems behauptet, Pauls Hoffnung sei niemals unendlich gross, weil das Vermögen Peters nicht unendlich gross sei und weil begreiflicher Weise Peter an Paul nicht mehr zahlen könne, als er besitze. Dementsprechend würde sich auch, wenn man bestimme, dass das Spiel nach einer endlichen Anzahl von Würfen abgebrochen würde, Pauls Hoffnung in den meisten Fällen niedriger stellen, als die obige Rechnung ergäbe: der höchste mögliche Gewinn Pauls sei eben unter keinen Umständen grösser als das Vermögen Peters. — Diese Lösung des Problems, die kürzlich noch Pringsheim[2]) vertrat, ist schon von d'Alembert[3]) und neuerdings wieder von Bertrand[4]) mit Recht zurückgewiesen worden. So richtig es ist, dass Peter, wenn er das

[1]) Vergl. die angeführte Übersetzung von D. Bernoullis Schrift p. 46.
[2]) a. a. O. p. 49.
[3]) a. a. O. p. 280.
[4]) Calcul des probabilités. Paris 1889. p. 64.

in unserem Problem dargelegte Spiel annimmt, in die Lage kommen kann, Gewinne auszahlen zu müssen, die auf der ganzen Erde nicht aufzutreiben sind, so ist in der Betonung dieser Thatsache doch keinerlei Lösung des Problems enthalten. Man nehme an, Peter besitze unendlich viele Dukaten, d. h. so viele, um jeden denkbaren Gewinn Pauls auszahlen zu können. Gegen diese irreale Annahme ist vom logischen Standpunkt aus doch gewiss nichts zu sagen. Wäre nun die erwähnte Lösung des Problems richtig, so wäre unter der Voraussetzung der Annahme von dem unendlichen Vermögen Peters jeder Widerspruch zwischen dem sogenannten gesunden Menschenverstand und den Ergebnissen der Rechnung aufgehoben. Man sieht aber leicht ein, dass, auch wenn die fragliche Annahme gemacht wird, jener Widerspruch in ganz gleicher Weise fortbesteht.

Auch eine andere zuerst von Cramer gegebene Lösung des Problems ist unzutreffend. Cramer sagt, der Wert, welchen ein Gewinn habe, sei nicht nach seiner Grösse, sondern nach dem Nutzen zu taxieren, welchen man daraus ziehen könne. Nun bedeute aber eine unendliche Summe von Thalern nicht mehr als zehn oder zwanzig Millionen: betrachte man daher alle Summen über 2^{24} d. i. 16777216 Thaler als unter sich gleichwertig, so habe Pauls Hoffnung für den Fall, dass unendlich viele Würfe zugelassen werden, den Wert:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\cdots+\frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{23}+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{27}}\cdot 2^{24}$$
$$+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=12+1$$
$= 13$ Thaler.

Nehme man aber an, was vielleicht richtiger sei, dass der moralische Wert eines Gutes proportional ist der

Quadratwurzel ihres mathematischen Wertes, so gelange man zu der Formel:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{4} \sqrt{2} + \frac{1}{8} \cdot \sqrt{4} \cdots = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}.$$

Diese Lösung setzt an Stelle der mathematischen Hoffnung oder (was dasselbe bedeutet) an Stelle des Einsatzes, den Paul bei unserem Spiel billiger Weise zu machen hat, die sogenannte moralische Hoffnung: sie setzt an Stelle der möglichen Gewinne Pauls die Werte, die Pauls mögliche Gewinne für ihn haben. Durch diese Wendung wird aber das Problem offenbar nicht gelöst, sondern beiseite geschoben: unsere Aufgabe fragt nicht nach der moralischen, sondern nach der mathematischen Hoffnung.[1])

Ungleich wertvoller ist offenbar die Lösung des Petersburger Problems, welche v. Kries gegeben hat. In der mathematischen Berechnung sagt dieser Forscher, liege kein Fehler: man überzeuge sich leicht, dass, wenn wir uns in endlicher Zeit, eine unbegrenzt häufige Wiederholung[2]) des Spieles denken, jeder endliche Einsatz von Seite Pauls den Peter mit allergrösster Wahrscheinlichkeit in Nachteil bringen müsse. Das Charakteristische des Spieles bestehe in der enormen Höhe der Gewinne und

---

[1]) Ähnlich wie Cramer's Lösung ist diejenige, welche später D. Bernoulli in seiner oben angeführten Schrift mitgeteilt hat. Dieselbe ist aber (vergl. ebendaselbst p. 55 f.) schon von J. Bernoulli in höflicher Form abgewiesen worden. Über Cramers Lösung vergl. die citierte Abhandlung von D. Bernoulli p. 56 ff. Über andere Lösungen des Petersburger Problems vergl. den V. Band der Berichte der Petersburger Akademie.

[2]) v. Kries scheint hier von dem Fall, dass Kopf überhaupt nicht fällt, gänzlich abzusehen. Wenn man diesen Fall berücksichtigt, so muss man annehmen, dass Peter und Paul die Spiele durch Gehülfen, die in unbegrenzter Zahl zu Gebote stehen, gleichzeitig ausführen lassen. Denn, wenn man Peter und Paul allein spielen lässt, so kann der Fall eintreten, dass niemals Kopf fällt, und Peter und Paul sind dann gar nicht in der Lage, das Spiel zu wiederholen.